Fernunterricht der Bundeswehrfachschule

ZUR VORBEREITUNG AUF DEN UNMITTELBAREN EINTRITT IN EINEN
REALSCHULREIFELEHRGANG ODER FACHSCHULREIFELEHRGANG DER BUNDESWEHRFACHSCHULE

MATHEMATIK

Lehreinheit 08

Grundbegriffe
der Mengenlehre

8. Grundbegriffe der Mengenlehre

Vielleicht geht es Ihnen beim Lesen der Überschrift wie vielen anderen Personen, das Wort „Mengenlehre" löst Abwehrreaktionen aus. Als die Mengenlehre ihren Einzug in den Mathematikstoff der Schulen hielt, geschah dies auf übertriebene Art und Weise. Mittlerweile haben sich jedoch viele Vorteile herausgestellt, so z.B.:

1. Für viele Teilbereiche der Mathematik liefert die Mengenlehre günstige und logisch einwandfreie Schreibweisen (z.B. beim Lösen von Ungleichungen).

2. Für die Wahrscheinlichkeitsrechnung, die beispielsweise in den Fachhochschulreifelehrgängen unterrichtet wird, ist die Mengenlehre zu einer wichtigen Grundlage geworden.

Haben Sie keine Sorge! Sie werden hier die Mengenlehre wohldosiert als Hilfsdisziplin für andere Teilbereiche der Mathematik erfahren.

8.1 Menge, Element

Die ersten Zahlen, die ein Kind kennenlernt, sind die Zahlen 1; 2; 3; ...; 10; später ... 100; ... usw. Es handelt sich um die 8Menge der) natürlichen Zahlen. Später lernt das Kind weitere Zahlenarten (Zahlenmengen) kennen: Brüche, negative Zahlen. Andere Arten von Dingen sind z.B. die (Menge der) Buchstaben und die (Menge der) Farben. Jeden dieser Erfahrungsbereiche kann man mit dem Begriff „Menge" erfassen; jeder Erfahrungsbereich enthält eine bestimmte Anzahl von Dingen (Elementen), die sich anhand bestimmter Eigenschaften unterscheiden lassen.

Begriffserklärung:

Eine Menge ist die Zusammenfassung von unterscheidbaren Dingen zu einem Ganzen. Die einzelnen Dinge der Menge heißen Elemente.

Menge
Elemente

Schreibweisen für Mengen

Mengen werden in der Mathematik durch Großbuchstaben gekennzeichnet z.b.: A; B; C; ...; M; auch A_1, A_2 usw.
Folgende Schreibweisen sind sinnvoll:

1. die aufzählende Form, sie ist besonders übersichtlich
2. die Diagrammform, sie ist besonders anschaulich
3. die beschreibende Form, sie ist notwendig für Fälle, in denen die anderen Möglichkeiten versagen.

Schreib-weisen

Die aufzählende Form

Beispiele:

a) Die Menge der Zahlenwerte auf einem Würfel:
W = {1; 2; 3; 4; 5; 6}

Mengenklammer Die geschweiften Klammern heißen Mengenklammern.
Möglich wäre auch: W = {2; 5; 3; 1; 6; 4}, zweckmäßig ist aber eine gewisse Reihenfolge beim Aufzählen der Elemente.

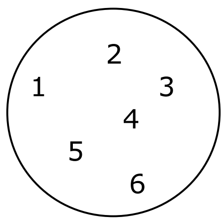
b) Die Menge der natürlichen Zahlen von 1 bis 100:
M = {1; 2; 3; ...; 99; 100}; wenn eindeutig klar ist wie es weitergeht, kann man Punkte setzen.

c) Die Menge der positiven geraden Zahlen:
G = {2; 4; 6; 8; 10; ...}
Hierbei handelt es sich um eine Menge mit unendlich vielen

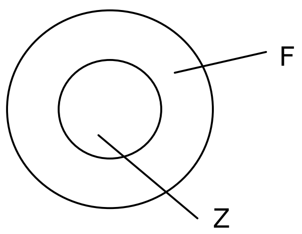
unendliche Elementen, es ist eine unendliche Menge im Gegensatz zu
endliche Menge den endlichen Mengen in den vorhergehenden Beispielen.

Die Diagrammform

Die Elemente einer Menge werden mit einer geschlossenen Linie umgeben,



z.B. Menge der Zahlenwerte auf einem Würfel.
Häufig stellt auch die ganze umrandete Fläche eine Menge dar. Um beispielsweise zu veranschaulichen, dass alle durch 10 teilbaren Zahlen (Menge Z) zu den durch 5 teilbaren Zahlen gehören (Menge F), kann man folgende Darstellung wählen:



Die äußere Umrandung umfasst alle durch 5 Teilbaren Zahlen; von diesen Zahlen befinden sich die durch 10 teilbaren Zahlen innerhalb der kleinen Fläche

Die beschreibende Form

In vielen Fällen lassen sich die Elemente einer Menge nicht aufzählen. Versuchen Sie beispielsweise die Zahlen einschließlich aller Dezimalzahlen aufzuzählen, die größer als 3 sind. Derartige Mengen lassen sich nur beschreiben,

z.B.: M = { alle Zahlen, die größer als 3 sind } oder
in mathematischer Schreibweise:

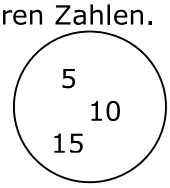
	M = {	x	|	x > 3 }
lies:		Menge aller x	für die gilt	x ist größer als 3

Die beschreibende Form hat also folgendes Aussehen:
{ x | Eigenschaft von x }

Die Menge G = { 2; 4; 6; 8; ...} lässt sich in der beschreibenden Form so darstellen:
G = { x | x ist eine natürliche gerade Zahl }
Die Menge aller Zahlen von 10 bis 20 in beschreibender Form:
M = { x | $10 \leq x \leq 20$ }

Übung 1:

1. Schreiben Sie in aufzählender Form:
   a) Die Menge M der ungeraden Zahlen zwischen 10 und 20.
   b) Die Menge L aller möglichen Lottozahlen.
   c) Die Menge D der durch 3 teilbaren Zahlen.
   d) Die Menge A.



   e) V = { x | x ist eine durch 4 teilbare Zahl unter 30 }

2. Schreiben Sie in beschreibender Form:
   a) Die Menge M aller Zahlen, die kleiner als 5 sind.
   b) Die Menge M aller Zahlen von 8 bis unter 12.

Wichtige Zahlenmengen

Für bestimmte Zahlenmengen gibt es eine feste Schreibweise, ein Großbuchstabe mit einem Doppelstrich, z.B.:

IN = {0; 1; 2; 3; 4; 5; .. } die <u>Menge der natürlichen Zahlen</u>

IN* = {1; 2; 3; 4; 5; ...} die <u>Menge der natürlichen Zahlen ohne Null</u>

9 = {...; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; ...} die <u>Menge der ganzen Zahlen</u>

Θ = {x|x lässt sich als Bruchzahl schreiben} die <u>Menge der rationalen Zahlen</u> (von Quotient)

Θ_+ = {x|x ist eine rationale Zahl, die nicht negativ ist}

Die Zeichen ∈, ∉

Mit diesen Zeichen kann man ausdrücken, ob ein Element zu einer Menge gehört oder nicht.

Beispiele:

4 ∈ {1; 2; 3; 4; 5; 6} 4 ∈ IN
lies: ist ein Element von

7 ∉ {(1; 2; 3; 4; 5; 6} , 2 ∉ {x / x <2}
lies: ist nicht Element von

Übung 2:

Welches der Zeichen ∈ bzw. ∉ gehört jeweils in den Kreis?

a) 5 ○ {4; 5; 6} b) 18 ○ {2; 4; 6;...}

c) 14 ○ {x|x ist durch 6 teilbar} d) 23 ○ {3; 7; 11; ...; 31}

e) 5 ○ {x|x >3} f) 2 ○ {x|x ist durch 4 teilbar}

Übungen zu 8.1

1. Schreiben Sie jeweils die beiden nächsten Elemente auf:
   a) {8; 11; 14; 17; ...} b) {1; 4; 9; 16;...}
   c) {4; 12; 36; 108; ...} d) {- 2; 4; -8; 16; ...}

2. Schreiben Sie in aufzählender Form:
   a) {x|x ist eine ganze Zahl von – 2 bis 5}
   b) {x|x ist durch 7 teilbar}

3. Was ist richtig, was ist falsch?
   a) 0 ∈ IN* b) – 7 ∉ IN c) ∈ Θ

   d) 5 ∈ Θ e) 3 ∈ {x|x < 0}

8.2 Teilmengen

Beim Skatspielen erhält jeder Spieler eine “Teilmenge” der Menge aller 32 Karten. diese Teilmenge umfasst 10 Elemente. Im Stock liegt eine zwei-elementige Teilmenge.

Begriffserklärung: Eine Menge A heißt Teilmenge einer Menge B, wenn <u>jedes</u> Element von A auch ein Element von B ist. *Teilmenge*

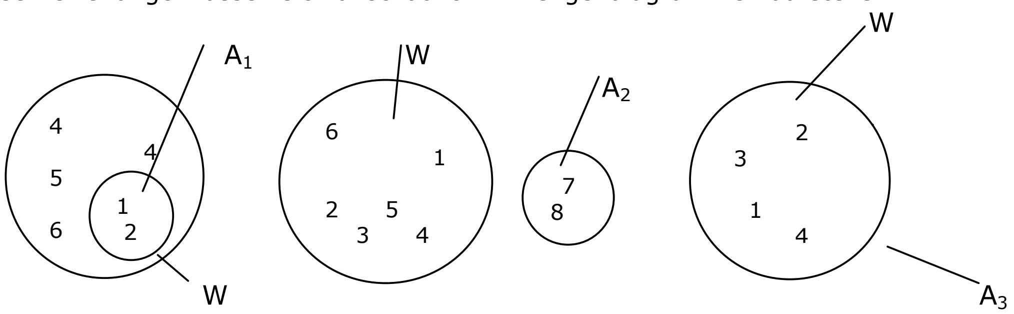
Zeichen: $\subset$ ist Teilmenge von
$\not\subset$ ist nicht Teilmenge vom

Beispiele:

1. ist K = {alle Skatkarten}, dann ist {Kreuz Bube, Herz König} $\subset$ K
2. {2; 7; 13; 14; 27; 43} $\subset$ {1; 2; 3; ...; 49} (Lottozahlen)
3. IN* $\subset$ IN IN $\subset$ 9 9 $\subset$ Θ
   kürzer: IN* IN$\subset$9$\subset$Θ
4. {- 2; -1} $\not\subset$ IN
5. Gegeben sind die Mengen A_1 = {1; 2}, A_2 = {7;8}, A_3 = {5; 6; 7}.
   Diese Mengen werden verglichen mit der Menge W = {1; 2; 3; 4; 5; 6}

Man sagt: A_2 und W sind <u>elementfremd,</u> *elementfremd*
A_3 und W sind <u>nicht elementfremd.</u> *nicht element-fremd*

Diese Beziehungen lassen sich anschaulich in Mengendiagrammen darstellen



$A_1 \subset W$ $A_2 \not\subset W$ $A_3 \not\subset W$

Übung 1:

Welches der Zeichen $\subset$ bzw. $\not\subset$ gehört jeweils in den Kreis?

a) {2; 3; 4} ◯ {1; 2; 3; 4} b) {9; 10} ◯ {1; 2; 3; ... 9}

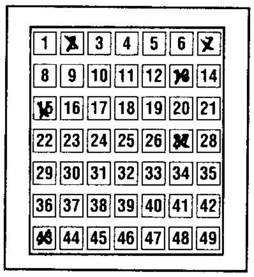
c) {0; 7; 8} ◯ IN d) {2; 3} ◯ 9

e) {x|x < 3} ◯ {x|x < 1} f) {4; 8; 12; 16; ...} ◯ {2; 4; 6; 8; ...}

Besondere Arten von Teilmengen

Bei gewissen Fragestellungen nach Teilmengen erhält man Antworten, die sich zunächst kau mit „Teil" oder „Menge" vereinbaren lassen, die aber trotzdem mit erfasst werden müssen.

Beispiel:
Jemand hat auf seinem Lottoschein die in der Abbildung markierten Zahlen angekreuzt:
M = {2; 7; 13; 15; 27; 43}



Nach der Ziehung stellt sich die Frage: „Welcher Teil bzw. welche Teilmenge T dieser sechs Zahlen wurden gezogen?"

Mögliche Antworten sind:

a) Die Zahlen 2, 13, 17 wurden gezogen,
d.h. T = {2; 13; 27}

b) Nur die Zahl 15 wurde gezogen, d.h. T = {15}

elementare Menge

Man erhält eine Teilmenge mit nur einem Element, man spricht von einer einelementigen Menge.

c) Keine dieser Zahlen wurde gezogen, d.h. T = {}.

leere Menge

T enthält kein Element, man spricht von einer leeren Menge (Schreibweise: {} oder Ø).

d) Alle angekreuzten Zahlen wurden gezogen, d.h.
T = {2; 7; 13; 15; 27; 43}.

unechte Teilmenge

Hier enthält T alle Elemente von M, man spricht von einer unechten Teilmenge.

Fasst man T als Variable für alle möglichen Teilmengen von „richtig angekreuzten Zahlen" auf, so kann man formulieren:

$T \subseteq \{2, 7, 13, 15, 27, 43\}$ (lies: Teilmenge von oder gleich)

Durch das Gleichheitszeichen unter dem Teilmengenzeichen wird besonders betont, dass auch die unechte Teilmenge als Möglichkeit in Frage kommt.
Allgemein gilt: Zu den Teilmengen einer Menge M gehören immer die leere Menge, die Mengen mit jeweils einem Element von M und die Menge M selbst.

Übung 2:

Schreiben Sie zu der Menge M = {1; 2; 3} sämtliche Teilmengen auf in der Form

T_1 = { T_2 = { usw.

Übungen zu 8.2

1. Stellen Sie in Mengendiagrammen dar:

   a) A = {2; 4; 6; 8} mit B = {4; 6}
   b) A = {5; 7; 9} mit B = {7; 8; 9}
   c) A = {3; 6} mit B = {9}

2. Was ist richtig, was ist falsch?

   a) $\{3\} \subset \{3, 4, 5\}$ b) $3 \subset \{3, 4, 5\}$

   c) $\{\} \subset \{5, 6\}$ d) $\{0\} \subset \{5, 6\}$

   e) $\{6, 7\} \not\subset \{7, 8\}$ f) $\{6, 7\} \not\subset \{7, 6\}$

3. Welche möglichen Kombinationen von Buben kann man beim Skatspiel erhalten? Lösen Sie dazu die folgende Aufgabe:

   Gegeben ist M = {Kreuz Bube; Pik Bube; Herz Bube; Karo Bube},
   kürzer: M = {KB; PB; HB; CB}

   Bestimmen Sie alle möglichen Teilmengen von M:
   (Schreibweise: T_1 = { , T_2 = { usw.)

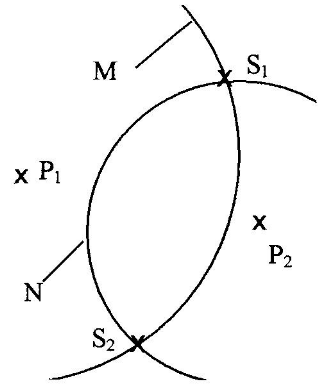
   Wenn Sie es richtig machen, erhalten Sie 16 Teilmengen (Kombinationen)!

8.3 Schnittmenge, Vereinigungsmenge, Restmenge

Schnittmengen (Durchschnittsmengen)

Ein Beispiel aus der Geometrie:

Gegeben sind zwei Punkte P_1 und P_2 (siehe Abbildung). Gesuch sind alle Punkte, die von P_1 den Abstand 3 cm und gleichzeitig von P_2 den Abstand 2 cm haben.



Lösung: Die Menge aller Punkte, die von P_1 den Abstand 3 cm haben, liegt auf einem Kreis um P_1 mit dem Radius 3 cm (Menge M); die Menge aller Punkte, die von P_2 den Abstand 2 cm haben, liegen auf einem Kreis um P_2 mit dem Radius 2 cm (Menge N). Die Schnittpunkte S_1 und S_2 der beiden Kreise sind die gesuchten Punkte.

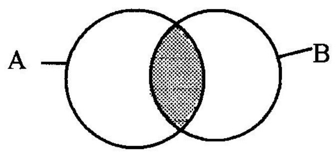
Schnittmenge

Begriffserklärung: Die Schnittmenge zweier Mengen A und B enthält alle Elemente, die zur Menge A und gleichzeitig zur Menge B gehören.

Schreibweise: $A \cap B$ (lies: A geschnitten mit B)

zu dem obigen Beispiel: $M \cap N = \{S_1; S_2\}$

Darstellung im Mengendiagramm:



$A \cap B$

(hier als Schnittfläche zweier Kreisflächen)

Weitere Beispiele:

1. Sei $A = \{3; 4; 6\}$, $B = \{1; 2; 3; 4\}$, $C = \{6; 7\}$,
   dann gilt: $A \cap B = \{3; 4\}$, $A \cap C = \{6\}$, $B \cap C = \{\}$,
   $A \cap B \cap C = \{\}$

2. $\mathrm{IN} \cap 9 = \mathrm{IN}$

3. Welche natürlichen Zahlen sind größer als 5 <u>und</u> gleichzeitig kleiner als 8?
   Man erhält als Lösung die Menge
   L = {6; 7; 8; 9; ...} ∩ {0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7}
   L = {6; 7}

Übung 1:

Bestimmen Sie:

a) {2; 4; 6; 8, 10} ∩ {4; 8; 12}
b) {-1; 0; 1; 2} ∩ IN
c) {x|x ist durch 3 teilbar} ∩ {5; 10; 15; 20; 25; 30}

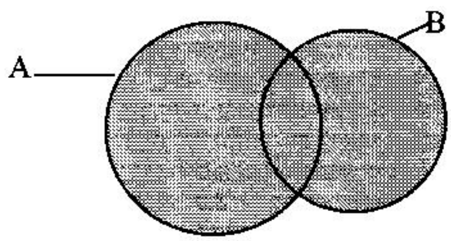
Vereinigungsmengen

Vereinigungsmenge

Begriffserklärung: Die Vereinigungsmenge zweier Mengen A und B enthält alle Elemente, die zur Menge A oder zur Menge B oder zu beiden Mengen gehören.

Schreibweise: A ∪ B (lies: A vereinigt mit B)

Darstellung im Mengendiagramm:



A ∪ B

Beispiele:

1. Sei A = {3; 4; 6}, B = {1; 2; 3; 4}, C = {6; 7}
   dann gilt: A ∪ B = {1; 2; 3; 4; 6}, A ∪ C = {3; 4; 6; 7}
   B ∪ C {1; 2; 3; 4; 6; 7}, A ∪ B ∪ C = {1; 2; 3; 4; 6; 7}

2. IN ∪ 9 = 9 IN = IN* ∪ {0}

3. Welche natürlichen Zahlen sind kleiner als 5 <u>oder</u> größer als 8?
   L = {0; 1; 2; 3; 4} ∪ {9; 10; 11; ...}
   L = {0; 1; 2; 3; 4; 9; 10; 11; ...}

Übung 2:

Bestimmen Sie:

a) {1; 3; 5} ∪ {4; 5; 6}

b) {- 2} ∪ IN*

c) {2; 3; 4} ∪ {4; 3; 2}

Restmenge (Differenzmengen)

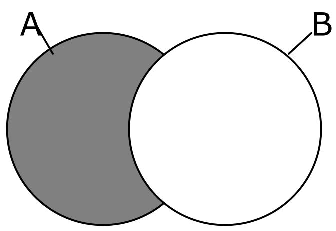
Beispiel:

Eine Menge A enthält alle natürlichen Zahlen, die kleiner als 10 sind,
d.h. A = {0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9}.
Eine Menge B enthält alle durch 3 teilbaren Zahlen,
d.h. B = {3; 6; 9; 12; ...}.
Gesucht sind alle natürlichen Zahlen, die kleiner als 10, aber nicht durch 3 teilbar sind.
Man erhält als Ergebnis {1; 2; 4; 5; 7; 8}, diese Menge enthält nur die Elemente aus A, die nicht zu B gehören (A ohne B).

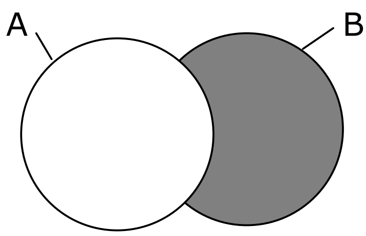
Restmenge **Begriffserklärung:** Die Restmenge A ohne B enthält alle Elemente, die zur Menge A, aber nicht zur Menge B gehören.

Schreibweise: A \ B (lies: A ohne B)
zu dem obigen Beispiel: A \ B = {1; 2; 4; 5; 7; 8}

Darstellung im Mengendiagramm:



A \ B



B \ A

Weitere Beispiele:

1. Sei A = {} B = {} C = {}
   dann gilt: A\B = {6} B\A = {1; 2}
   A\C = {3; 4} C\A = {7}
   B\C = {1; 2; 3; 4} C\B = {6; 7}

2. IN \ IN* = {0}, IN\9 = {}

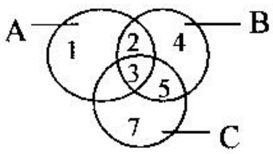
Bemerkung: Während immer A ∩ B = B ∩ A und A ∩ B = B ∩ A gilt, ist fast immer A\B ≠ B\A

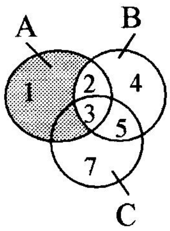
Übung 3:

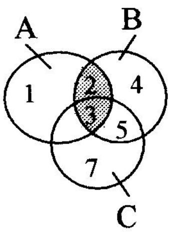
Bestimmen Sie:

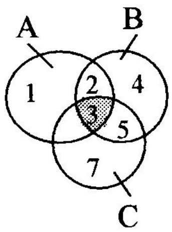
a) {4; 8; 12; 16}\{4; 12}
b) {4; 8; 12; 16}\{12, 24}
c) IN*\{x|x ist eine ungerade Zahl}

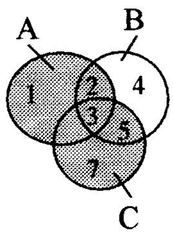
Ein zusammenfassendes Beispiel:
Gegeben ist A = {1; 2; 3}, B = {2; 3; 4; 5}, C = {3; 5; 7}
Diese Mengen lassen sich in <u>einem</u> Mengendiagramm darstellen.
Es gilt z.B.:







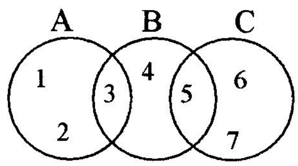




A\B = {1} A∩B = {2; 3} A∩B∩C = {3} A∪C = {1; 2; 3; 5; 7}

Übungen zu 8.3

1. Gegeben ist folgendes Mengendiagramm:



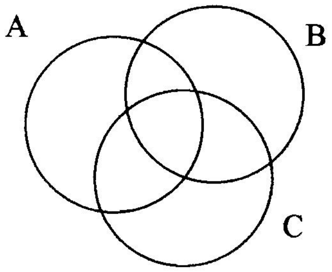
Bestimmen Sie:

a) A ∪ B = b) B ∩ C =

c) B \ (A ∪ C) = d) A ∩ B ∩ C =

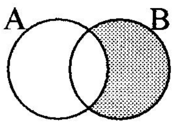
e) C \ A = f) (A ∩ B) ∪ (B ∩ C) =

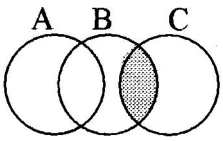
2. Gegeben sind die Mengen A = {1; 2; 3; 4}, B = {2; 5; 6} C = {2; 5; 7}
Tragen Sie alle Elemente in das abgebildete Mengendiagramm ein.

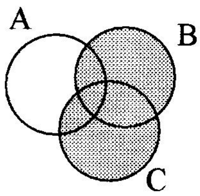


3. Bestimmen Sie die grau hinterlegten Flächen.

a) b) c)







8.4 Aussage und Aussageform

Mit Hilfe der Begriffe „Aussage" und „Aussageform" lassen sich Begriffe wie Gleichungen, Ungleichungen, Lösungen sowie logische Schlussfolgerungen genau erklären.

Aussage

Begriffserklärung: Eine Behauptung, die wahr oder falsch ein kann, heißt Aussage.

Beispiele:

1. 2 + 3 = 5 ist eine wahre Aussage.
2. 2 + 3 = 6 ist eine falsche Aussage.
3. 7 + 5 < 13 ist eine wahre Aussage.
4. a) „Ist eine Zahl durch 10 teilbar, dann ist sie auch durch 15 teilbar" ist eine wahre Aussage.
   Diese Aussage lässt sich auch mit dem Folgepfeil „⇒" formulieren: (siehe LE 04/4.1)
   „Eine Zahl ist durch 10 teilbar ⇒ die Zahl ist durch 5 teilbar."

   b) „Eine Zahl ist durch 5 teilbar ⇒ die Zahl ist durch 10 teilbar" ist eine falsche Aussage, da z.B. 15 nicht durch 10 teilbar ist.

4. a) „Eine Zahl ist durch 6 teilbar ⇒ die Zahl ist durch 2 und durch 3 teilbar" ist eine wahre Aussage.

   b) „Eine Zahl ist durch 2 und 3 teilbar ⇒ die Zahl ist durch 6 teilbar" ist ebenfalls eine wahre Aussage.
   In diesem Fall gilt der Folgepfeil auch für die Umkehrung der Aussage in 5 a).

Man kann in solchen Fällen das Zeichen „⇔“ benutzen (lies: ist äquivalent mit; „äquivalent“ bedeutet „gleichwertig“).
Die Aussagen in 5a) und 5b) lassen sich mit Hilfe dieses Zeichens so formulieren:

„Die Zahl ist durch 6 teilbar ⇔ die Zahl ist durch 2 und durch 3 teilbar.“

Übung 1:

Welche Aussagen sind wahr, welche falsch?

a) $3 + 8 > 9$ b) $5 \neq 6$ c) $5 \in \{2; 4; 6\}$

d) IN ⊂ 9 e) $3 - 7 < 5 - 8$ f) $10 - 7 = 7 - 10$

g) $3 + 5 \cdot 4 = 23 \Leftrightarrow 5 \cdot 4 = 20$

h) 30 ist durch 6 teilbar ⇒ 6 ist durch 30 teilbar

Aussageformen

Beispiele:

1. Für die Aussage (Gleichung) $x + 3 = 5$ kann man nicht entscheiden, ob sie wahr oder falsch ist, da sie eine Variable enthält.
   Aber: Für $x = 2$ erhält man eine wahre Aussage, für $x \neq 2$ erhält man eine falsche Aussage.

2. Für welche natürlichen Zahlen ist die Aussage $x + 3 < 5$ eine wahre Aussage?
   Dies ist eine Ungleichung, für $x = 0$ sowie für $x = 1$ erhält man wahre Aussagen. *Ungleichung*

Begriffserklärung: Enthält eine Aussage (mindestens) eine Variable, so spricht man von einer Aussageform. *Aussageform*

Bei sämtlichen Gleichungen oder Ungleichungen mit Variablen handelt es sich um Aussageformen. Der Begriff „Lösung“ einer Gleichung bzw. Ungleichung lässt sich so formulieren:
Unter der Lösung einer Gleichung bzw. Ungleichung versteht man die Zahlen, die beim Einsetzen für die Variable eine <u>wahre Aussage</u> liefern. *Lösung*

Beispiel:

$2 \cdot x + 6 = 16$ Die Lösung der Gleichung lautet $x = 5$,
weil $2 \cdot 5 + 6 = 16$ eine wahre Aussage ist.

Übung 2:

a) Welche Zahl liefert eingesetzt für x eine wahre Aussage?
$14 - 3 \cdot x = 2$

b) Für welche natürlichen Zahlen erhält man eine wahre Aussage?
$4 \cdot x + 2 < 12$

8.5 Definitionsmenge, Lösungsmenge

Diese beiden Begriffe aus der Mengenlehre stellen wesentliche Hilfsmittel für andere Bereiche der Mathematik dar. das gilt besonders für die Gleichungen und Ungleichungen.

Beispiele

1. Auf einem Taschenrechner finden Sie die Taste $\boxed{1/x}$. Bei der Tastenfolge $\boxed{2}$ $\boxed{1/x}$ erscheint die Zahl 0,5 (Rechnung: 1 : 2 = 0,5). Statt der Zahl 2 können Sie eine beliebige andere Zahl eingeben und $\boxed{1/x}$ drücken. Sie erhalten immer ein Ergebnis bis auf eine Ausnahme:
Definitions-menge Nach $\boxed{0}$ $\boxed{1/x}$ erscheint E (Error). Das bedeutet: Die Zahl 0 ist eine Zahl, mit der man bezüglich der Taste $\boxed{1/x}$ kein Ergebnis erhält (durch 0 kann man nicht dividieren!). Schließt man die Zahl 0 aus, so erhält man die Definitionsmenge D für das Rechnen mit der Taste $\boxed{1/x}$.

2. Die Gleichung $4 \cdot x + 5 = 13$ soll gelöst werden. Lösung durch Probieren: Für x kann eine beliebige Zahl eingesetzt werden, 4 · Zahl + 5 liefert immer ein Ergebnis (Error ist nicht möglich).
Lösungsmenge Die Definitionsmenge kann alle Zahlen enthalten. Für $x = 2$ erhält man die wahre Aussage $4 \cdot 2 + 5 = 13$, jede andere Zahl für x liefert eine falsche Aussage. Man sagt: die Gleichung hat die Lösungsmenge $L = \{2\}$.

3. a) 3 Tafeln Schokolade sollen an 6 Kinder gleichmäßig verteilt werden. Jedes Kind erhält eine halbe Tafel ($L = \{1/2\}$).

   b) Wenn 3 Bälle gleichmäßig an 6 Kinder verteilt werden sollen, ist es

unsinnig, jedem Kind einen halben Ball zu geben (L = {}).
Die Definitionsmengen sind unterschiedlich! Beim Verteilen von Tafeln Schokolade ist es sinnvoll, mit Bruchzahlen zu rechnen, beim Verteilen von Bällen sollte man sich auf die natürlichen Zahlen beschränken und lieber 6 Bälle an 3 Kinder gleichmäßig verteilen.

4. Für die Ungleichung x + 5 > 12 soll die Lösungsmenge bestimmt werden.
   Sie werden sagen: L = {8; 9; 10; ...}, denn man erhält z.B. für x = 8 die wahre Aussage 8 + 5 > 12.
   Aber: Müsste die Lösungsmenge nicht auch Zahlen wie 7,1; 7,2 usw. enthalten, weil z.B. 5 + 7,1 > 12 ebenfalls eine wahre Aussage ist?
   Ohne eine Angabe der für x zur Verfügung stehenden Zahlen, d.h. ohne Angabe der Definitionsmenge, kann man die Lösungsmenge nicht genau bestimmen.

   Für die Definitionsmenge D = IN beispielsweise erhält man L = {8;9;10;...},
   für die Definitionsmenge D = {1; 2; 3; 4} erhält man L = {},
   für die Definitionsmenge D = Θ erhält man L = {x|x > 7}.

   Im letzten Fall muss für L die beschreibende Form gewählt werden, da man die Zahlen nicht aufzählen kann (siehe 8.1).

   Statt L = {x|x > 7} schreibt man besser L = $\{x|x > 7\}_\Theta$
   (lies: Menge aller x für die gilt x > 7, bezüglich Θ),
   um den Zusammenhang mit der Definitionsmenge auszudrücken.

Begriffserklärungen

Die Definitionsmenge D enthält alle Zahlen, die für eine Rechnung zur Verfügung stehen und mit denen man sinnvoll rechnen kann. *Definitions-menge*

Die Lösungsmenge L enthält alle Elemente der Definitionsmenge, die beim Eisnetzen für eine Variable eine wahre Aussage liefern. *Lösungs-menge*

Was müssen Sie in der Folge beim Lösen von Gleichungen und Ungleichungen beachten?
Vereinbarung: Es gibt zwei Möglichkeiten:

1. <u>D wird in der Aufgabenstellung vorgegeben</u>. In diesem Fall

sollten Sie jede Lösung überprüfen, ob sie ein Element von D ist.

Beispiel: a) $2 \cdot x = -8$, D = IN
$\Rightarrow$ x = - 4, L = {}

b) $2\ x = -8$, D = 9
$\Rightarrow$ x = -4, L = {-4}

2. <u>D wird in der Aufgabenstellung nicht vorgegeben.</u> In diesem Fall können Sie zunächst von allen Zahlen in Q ausgehen, unter Umständen müssen Sie selbst für D eine Einschränkung bezüglich Q vornehmen, und zwar (in diesem Fernkurs)

   a) bei Textaufgaben, wo häufig D = IN oder D = Θ_+ ist;

   b) bei Gleichungen oder Ungleichungen, wo die Variable im Nenner steht.

   Beispiel:

   Zu a) Wenn man für den Kauf von Flaschen mit Bier weniger als 10 € ausgeben möchte und wenn die ausgewählte Sorte einen Flaschenpreis von 0,80 € hat, dann ergibt die Ungleichung
   $0{,}80 \cdot x < 10$ nur bezüglich D = IN einen Sinn.
   Man erhält die Lösungsmenge L = {0; 1; 2; ...; 12}

   Zu b) In der Gleichung = 10 erhält man für fast

   jede Zahl aus Θ eine (wahre oder falsche) Aussage, nur für x = 5 ergibt der Bruch keinen Sinn.

   Es gilt D = Θ \ {5}, L = {3}.

Bemerkung: Die folgenden Gleichungen und Ungleichungen in den Übungen und Aufgaben sollen weitgehend durch Probieren gelöst werden. Die in LE 04 erlernten Umformungstechniken reichen in einigen Fällen nicht aus. In LE 09 wird das Thema „Gleichungen“ erweitert. An dieser Stelle stehen D und L im Vordergrund.

Übungen zu 8.5

1. Bestimmen Sie Lösungsmenge bezüglich D = IN durch Probieren.

a) $6 + 2 \cdot x = 16$
b) $2 \cdot x + 3 < 12$
c) $18 + x = 16$
d) $10 + 2 \cdot x = 15$

2. a) Eine ernste Angelegenheit:
Bei einem Würfelspiel mit nummerierten Feldern möchte ein Spieler, der sich auf der Nummer 53 befindet, den Stein eines Gegenspielers auf Nummer 58 mit einem Würfelwurf rauswerfen. Welche Zahl muss er würfeln?
Bestimmen Sie dazu für die Gleichung $53 + x = 58$ D und L.

b) Sehen Sie ein, dass in dem Problem zu a) für die Gleichung $53 + x = 60$ $L = \{\}$ gilt?

3. Bestimmen Sie D und L (durch Probieren):

a)
b) $12 : (x - 1) = 6$

b)
d)

AUFGABEN ZUR LEHREINHEIT 08

1. Was ist wahr, was ist falsch?

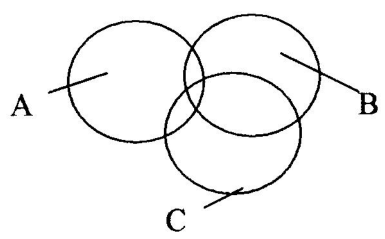
   a) $7 \in IN$ b) $\{3\} \subset \{1; 2; 3\}$
   c) $0 \in \{\}$ d) $\{1; 2; 3\} \neq \{2; 4; 1\}$
   e) $\{x \backslash x < 5\}_{IN} = \{0; 1; 2; 3; 4\}$

2. Gegeben sind die Mengen $A = \{2; 4; 6; 8\}$,
   $B = \{1; 3; 6; 9\}$

   a) Bestimmen Sie $A \cap B$, $A \cup B$, $A \backslash B$, $B \backslash A$.

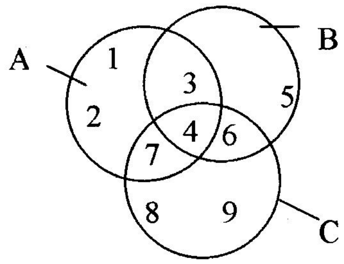
   b) Fertigen Sie ein Mengendiagramm an, in welches die obigen Elemente eingetragen werden.

   c) Eine weitere Menge C ist gegeben: $C = \{2; 6; 7; 9\}$
   Tragen Sie die Elemente von A, B und C in ein Mengendiagramm der Form



   ein

3. Gegeben ist folgendes Mengendiagramm:



4. Bestimmen Sie bezüglich D = $\mathbb{Z}$ die Lösungsmenge (durch Probieren)

a) $5 \cdot x = -15$ b) $12 + x = 18$ c) $15 \cdot x = 0$
d) $12 - x = 18$ e) $2 \cdot x - 4 > 0$ f) $0 \cdot x = 5$

5. Bestimmen Sie D und L (durch Probieren)

a) b) c)

LÖSUNGEN DER ÜBUNGEN UND AUFGABEN

Übungen

8.1, Übung 1: 1. a) M = {11; 13; 15; 17; 19}
b) L = {1; 2; 3; ...; 48; 49}
c) D = {3; 6; 9}
d) A = {5; 10; 15}
e) V = {4; 8; 12; 16; 20; 24; 28}

a) M = {x\x < 5}

b) M = {x\8≤x<12}

8.1, Übung 2: a) $\in$, b) $\in$, c) $\notin$,
d) $\in$, e) $\in$, f) $\notin$

Übungen zu 8.1: 1. a) 20; 23 b) 25; 36
c) 324; 972 d) – 32; 64

2. a) M = {- 2; - 1; 0; 1; 2; 3; 4; 5}
b) M = {7; 14; 21; ...}

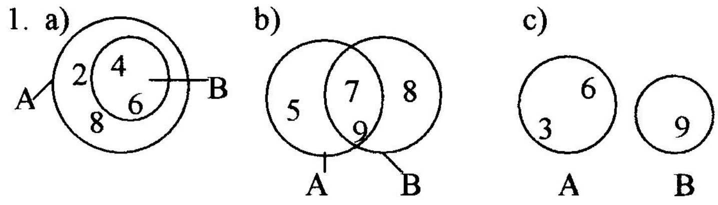
c) richtig: b), c), d)
falsch: a), e)

8.2, Übung 1: a) $\subset$ b) $\not\subset$ c) $\subset$

d) $\subset$ e) $\not\subset$ f) $\subset$

8.2, Übung 2: $T_1 = \{\}$; $T_2 = \{1\}$; $T_3 = \{2\}$; $T_4 = \{3\}$;
$T_5 = \{1, 2\}$ $T_6 = \{1; 3\}$ $T_7 = \{1; 3\}$ $T_8 = \{1; 2; 3\}$

Übungen zu 8.2: 1.



2. richtig: a); c); e); f)
falsch: b) ($3 \in \{3; 4; 5\}$); d)

3. $T_1 = \{\}$; $T_2 = \{KB\}$; $T_3 = \{PB\}$;
$T_4 = \{HB\}$; $T_5 = \{CB\}$; $T_6 = \{KB; CB\}$;
$T_7 = \{KB; HB\}$; $T_8 = \{KB; PB\}$; $T_9 = \{PB;HB\}$;
$T_{10} = \{PB; CB\}$; $T_{11} = \{HB; CB\}$
$T_{12} = \{KB; PB; HB\}$; $T_{13} = \{KB; PB; CB\}$;
$T_{14} = \{KB; HB; CB\}$; $T_{15} = \{PB; HB; CB\}$;
$T_{16} = \{KB; PB; HB; CB\}$

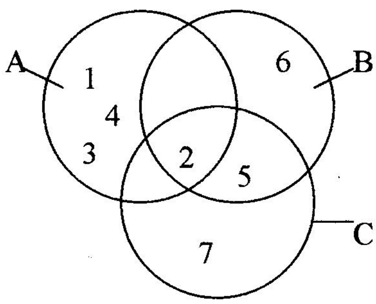
8.3, Übung 1: a) {4; 8} b) {0; 1; 2} c) {15; 30}

8.3, Übung 2: a) {1; 3; 4; 5; 6} b) {– 2; 1; 2; 3; ...} c) {2; 3; 4}

8.3, Übung 3: a) {8; 16} b) {4; 8; 16} c) {2; 4; 6; 8; ...}

Übungen zu 8.3: 1. a) {1; 2; 3; 4; 5} b) {5} c) {4}
d) {} e) {5; 6; 7} f) {3; 5}

2.



3. a) B\A b) $B \cap C$ C) $B \cup C$

8.4, Übung 1: wahr: a); b), d); e); g)

falsch: c); f); h)

8.4, Übung 2: a) 4; b) 0; 1; 2

Übungen zu 8.5:

1. a) L = {5} b) L = {0; 1; 2; 3; 4}
   c) L = {} d) L = {}

2. a) D = {1; 2; 3; 4; 5; 6}; L = {5} b) 7 ∉ D

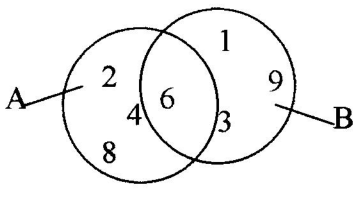
3. a) D = Θ \ {0}; L = {3}
   b) D = Θ \ {1}; L = {3}
   c) D = Θ \ {3}; L = {-9}
   d) D = Θ \ {0}; L = {5}

Aufgaben

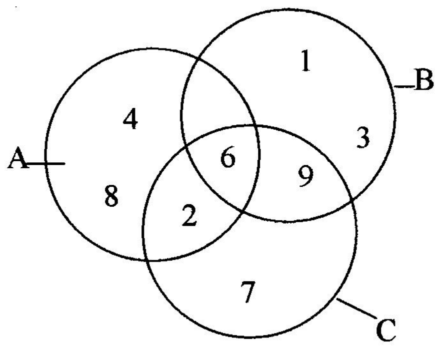
Aufgabe 1: wahr: a); b); e); falsch: c); d)

Aufgabe 2: a) A ∩ B = {6}; A ∪ B = {1; 2; 3; 4; 6; 8; 9};
A \ B = {2; 4; 8}; B \ A = {1; 3; 9}

b)



c)



Aufgabe 3: $A \cap B \cap C = \{4\}$; $A \setminus B = \{1; 2; 7\}$;
$A \cap C = \{4; 7\}$; $(B \cup C) \setminus A = \{5; 6; 8; 9\}$;
$(A \cap B) \setminus C = \{3\}$; $(A \cap B) \cup (B \cap C) = \{3; 4; 6\}$;
$(A \cup B \cup C) \setminus (A \cap B \cap C) = \{1; 2; 3; 5; 6; 7; 8; 9\}$

Aufgabe 4: a) $L = \{-3\}$ b) $L = \{6\}$ c) $L = \{0\}$
d) $L = \{-6\}$ e) $L = \{3; 4; 5; ...\}$; f) $L = \{\}$

Aufgabe 5: a) $D = \Theta \setminus \{0\}$; $L = \{20\}$
b) $D = \Theta \setminus \{1\}$; $L = \{3\}$
c) $D = \Theta \setminus \{-1\}$; $L = \{1\}$

Lösungen der Übungen und Aufgaben *Vb-08*

FERNUNTERRICHT DER BUNDESWEHRFACHSCHULE

DstGrd	Name	Vorname

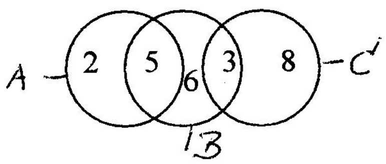
Einheit	Standort	DZE

Privatanschrift	Datum

1. Gegeben sind die Mengen $A = \{3; 5\}$; $B = \{5; 6; 7\}$; $C = \{3; 7\}$.

   a) Bestimmen Sie: $A \cap B$; $A \cap C$; $A \cup B$; $A \setminus C$; $C \setminus B$.
   b) Stellen Sie die Mengen A, B und C in einem Mengendiagramm dar.

2. Gegeben ist folgendes Mengendiagramm:



Bestimmen Sie:
B C; A B; A B C; B C; A (B C)
(A B) C; A (B A); A (B A)

3. Bestimmen Sie bezüglich IN die Lösungsmenge (durch Probieren):

a) $4 \; x = - 8$ b) $25 - x = 27$ c) $x \; (- 3) = - 6$

d) $2 \; x + 8 > 20$ e) $50 - 4 \; x = 40$ f) $3 \; x < 13$

4. Bestimmen Sie bezüglich Θ D und L (durch Probieren):

a) b)

c) d) $x : 8 = - 2$

Lösungen der Testaufgaben *Vb-08*

DstGrd Name Vorname Blatt