Fernunterricht der Bundeswehrfachschule

ZUR VORBEREITUNG AUF DEN UNMITTELBAREN EINTRITT IN EINEN
REALSCHULREIFELEHRGANG ODER FACHSCHULREIFELEHRGANG DER BUNDESWEHRFACHSCHULE

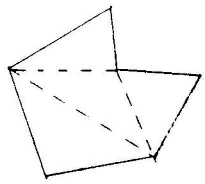
MATHEMATIK

Lehreinheit 11

Geometrie:
Dreiecke und Vierecke

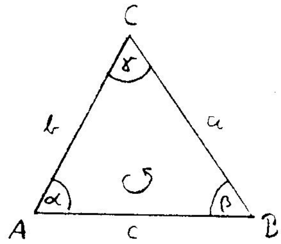
 ©Bundeswehrfachschule Koblenz

11 Geometrie: Dreiecke und Vierecke

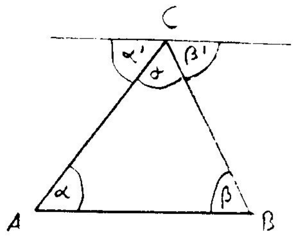


11.1 Dreiecke: Winkel, Seiten

Die Dreieckslehre spielt in der Geometrie eine große Rolle. Daneben haben bei den Flächen lediglich noch Vierecklehre und Kreislehre eine größere Bedeutung. Ein Grund: Jedes Vieleck lässt sich in Dreiecke zerlegen (siehe Abb.).
Die Eckpunkte eines Dreiecks werden mit A, B, C gekennzeichnet. Die Winkel an den Eckpunkten A, B, C werden mit α, β,γ gekennzeichnet. Für die den Eckpunkten A, B, C gegenüberliegenden Seiten schreibt man a, b, c. Die Bezeichnung der Punkte, Winkel und Seiten erfolgt immer in einem positiven Drehsinn („links herum").



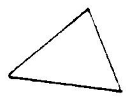
Alle Winkel im Dreieck ergeben zusammen 180°.
Die Begründung:
Man zeichnet durch C eine Gerade parallel zu einer Geraden durch A und B (siehe Abb.). Die Winkel , α', γ und β' ergeben zusammen 180°, d.h. $\alpha' + \gamma + \beta' = 180°$. Da aber $\alpha = \alpha'$ und $\beta = \beta'$ ist (es handelt sich um Wechselwinkel an Parallelen), folgt daraus $\alpha + \gamma + \beta = 180°$.



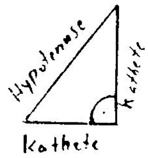
Dreiecksarten:

Man kann Dreiecke bezüglich der Winkel oder bezüglich der Seiten unterscheiden. Bezüglich der Winkel gebt es folgende Arten:

spitzwinklige Dreiecke:
In einem spitzwinkligen Dreieck sind alle Winkel kleiner als 90°.



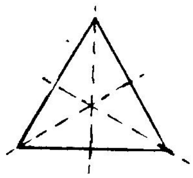
rechtwinklige Dreiecke:
In einem rechtwinkligen Dreieck ist ein Winkel 90°. Die Schenkel des rechten Winkels heißen Katheten, die Seite, die dem rechten Winkel gegenüberliegt, heißt Hypotenuse.



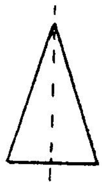
stumpfwinklige Dreiecke:
In einem stumpfwinkligen Dreieck ist ein Winkel größer als 90°.

©Bundeswehrfachschule Koblenz

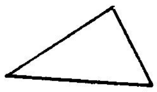
Bezüglich der Seiten gibt es folgende Arten:



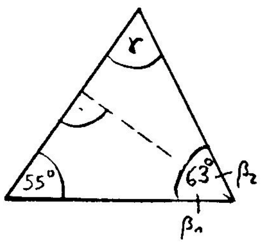
gleichseitige Dreiecke:
In einem gleichseitigen Dreieck sind alle Seiten gleich lang. Jeder Winkel hat 60°. Ein gleichseitiges Dreieck hat 3 Symmetrieachsen. Eine Symmetrieachse teilt eine Figur in zwei Hälften, dabei ist eine Hälfte das Spiegelbild der anderen.



gleichschenklige Dreiecke:
In einem gleichschenkligen Dreieck sind zwei Seiten gleich lang. Sie heißen Schenkel. Die dritte Seite heißt Basis. Die Winkel an der Basis sind gleich groß. Ein gleichschenkliges Dreieck hat eine Symmetrieachse.

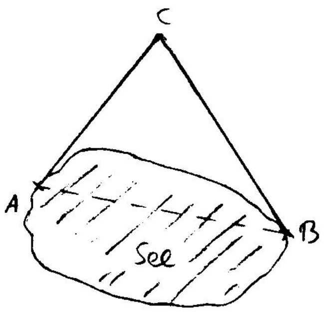


ungleiche Dreiecke:
In einem ungleichseitigen Dreieck haben alle Seiten voneinander verschiedene Längen.



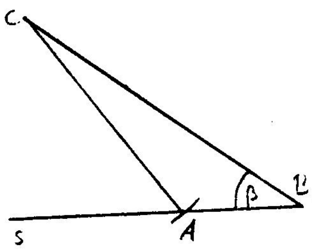
Übungen zu 11.1

1. Berechnen Sie zu der nebenstehenden Figur den Winkel γ, β_1 und β_2!
2. Zwei gerade Wege schneiden sich unter einem Winkel von 52° in einem Punkt C. Der erste Weg wird in einem Punkt B ≠ C rechtwinklig von einer Straße geschnitten. Unter welchem Winkel kreuzt diese Straße den zweiten Weg (Punkt A), wenn auch die Straße geradlinig verläuft?

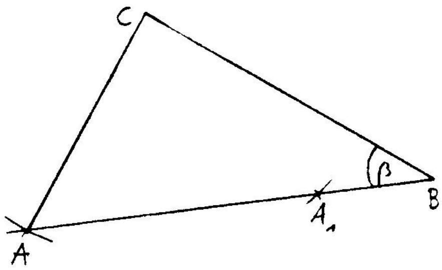


11. 2 Kongruenzsätze

Ein See, der zu klein ist:
Ein Landvermesserlehrling soll die Entfernung zwischen den Punkten A und B am Ufer eines Sees bestimmen (siehe Skizze). Nach seiner Schätzung ist der See dort ungefähr 60 m breit. Von A aus wählt er sich einen Hilfspunkt C und misst ⊕∩ = 33 m. Anschließend misst er ∩B = 44 m. In B angekommen bestimmt er mit Hilfe eines Theodoliten (Winkelmessgerät) den Winkel β zwischen ⊕B und ∩B mit β = 37°.
Im Büro fertigt er zur Bestimmung von ⊕B eine Zeichnung im Maßstab 1:1000 (10 m entsprechen 1 cm) folgendermaßen an:
Er zeichnet ∩B = 4,4 cm, dann trägt er β = 37° ein und erhält einen freien Schenkel s von β , auf dem A liegen muss. Er zeichnet um C einen Kreisbogen mit dem Radius 3,3 cm und ermittelt den Punkt A als Schnittpunkt mit dem Schenkel s (siehe Abbildung).



Er erhält ein ernüchterndes Ergebnis: Bei einer geschätzten Entfernung von 60 m für ⊕B gelangt er mit Hilfe der Zeichnung zur Erkenntnis, dass ⊕B ungefähr 16 m ist. Oder?
Bei der Überprüfung der Zeichnung hat er ein „Aha-Erlebnis“ (Sie auch?).
Der Kreisbogen um C schneidet den Schenkel s von β noch einmal! Er liest ab: ⊕B ≈ 55 m !!!



Die Kongruenzsätze geben an, welche Seiten oder Winkel mindestens benötigt werden, um ein Dreieck eindeutig zeichnen zu können. Die obigen Messungen im Gelände liefern zwei nicht kongruente Dreiecke, also keine Eindeutigkeit.

Folgende Messungen hätten ein eindeutiges Ergebnis geliefert:

a) ⊕∩, γ, ∩B, mit ⊕∩ = 33 m, γ = 89°, ∩B = 44 m.
Probieren Sie!

b) ⊕∩, α, γ, mit ⊕∩ = 33 m, α = 54°, γ = 89°.
Probieren Sie!

Der obigen Landvermesserlehrling hatte etwas Pech. Wäre die Strecke AC größer als CB, dann hätte auch er ein eindeutiges Ergebnis gefunden.

Bemerkung:
Vielleicht haben Sie anhand Ihrer Zeichnung für „geringfügig“ unterschiedliche Ergebnisse erzielt (54 m, 55 m, 56 m).
Mit Hilfe der Trigonometrie kann man Seiten (und Winkel) eines Dreiecks exakt berechnen. Trigonometrie wird schwerpunkthaft in den M-Lehrgängen der Bundeswehrfachschule behandelt!

Die Kongruenzsätze werden nun nacheinander mit Beispielen und Übungen behandelt.

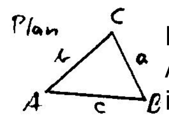
Die Kongruenzsätze im Überblick:

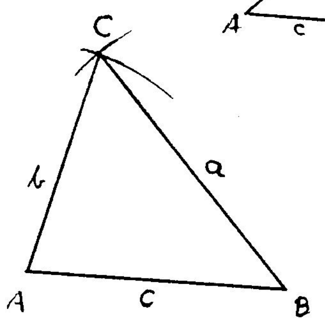
Dreiecke sind kongruent, wenn sie übereinstimmen in
(oder: Ein Dreieck lässt sich, abgesehen von der Lage, eindeutig konstruieren, wenn gegeben sind)

1. drei Seiten (SSS),
2. zwei Seiten und dem von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel (SWS), (siehe oben Fall a),
3. einer Seite und zwei Winkeln (SWW), (siehe oben Fall b),
4. zwei Seiten und dem Winkel, der der größeren von den beiden Seiten gegenüberliegt (SSW), (siehe oben „Pech")

Beispiel zum 1. Kongruenzsatz: Gegeben sind 3 Seiten.

Es soll ein Dreieck mit A = 4,0 cm, b = 3,0 cm und c = 3,5 cm konstruiert erden.

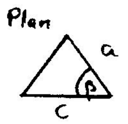




Lösung:
Anhand einer Probefigur (Skizze) wird die Lage der gegebenen Größen in etwa bestimmt. Man zeichnet zunächst eine der gegebenen Seiten, z.B. c = 3,5 cm. Es ist jetzt nicht möglich, ohne Zirkel die genaue Lage von Punkt C zu finden! Versuchen Sie!
Mit Zirkel:
Um A wird ein Kreisbogen mit dem Radius b = 3 cm gezeichnet und um B ein Kreisbogen mit dem Radius a = 4 cm. Der Schnittpunkt der beiden Kreisbögen ist der Punkt C. Man verbindet A mit C und B mit C.

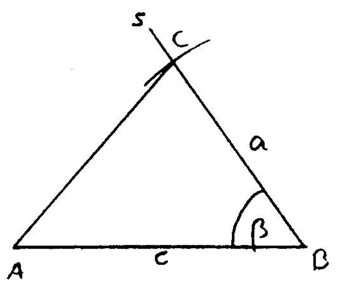
Übung 1:

1. Zeichnen Sie ein Dreieck mit a = 5,6 cm; b = 4,4 cm; c = 6,4 cm.
2. Zeichnen Sie ein gleichseitiges Dreieck mit a = 4 cm.



Beispiel zum 2. Kongruenzsatz: Gegeben sind 2 Seiten und der eingeschlossene Winkel.

Es soll ein Dreieck mit c = 3,9 cm, a = 3 cm und β = 55° gezeichnet werden.



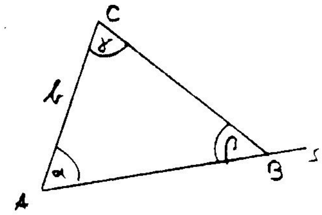
Lösung:
Man zeichnet zunächst eine der gegebenen Seiten, z.B. c = ⊕B = 3,9 cm.
In B wird der Winkel β = 55° eingetragen. Man erhält einen sogenannten freien Schenkel s von β, auf dem a = B∩ = 3 cm abgetragen wird (mit Zirkel oder mit Geodreieck). C wird mit A verbunden.

Übung 2:

1. Zeichnen Sie ein Dreieck mit a = 3,6 cm; b = 4,2 cm; γ = 72°. Ermitteln Sie c durch Messung.
2. Zeichnen Sie ein gleichschenkliges Dreieck mit der Schenkellänge a = b = 3,6 cm und γ = 100°. Ermitteln Sie c durch Messung.

Beispiel zum 3. Kongruenzsatz: Gegeben sind eine Seite und zwei Winkel.

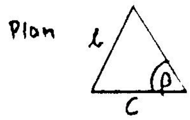
Es soll ein Dreieck mit B = 2,3 cm; = 62° und = 47° gezeichnet werden.



Lösung:
Man zeichnet zunächst b = = 2,3 cm. In A wird der Winkel = 62° eingetragen. Auf dem freien Schenkel s von muß liegen, aber wo? Man berechnet mit = 180° - - = 180° - 62° - 47° = 71°. = 71° wird in C eingetragen. Der Punkt B ist der Schnittpunkt der freien Schenkel von und .

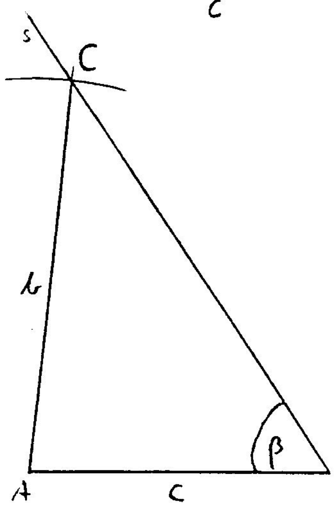
Übung 3:

Zeichnen Sie ein Dreieck mit a = 3,5 cm; β = 59°; α = 85°. Ermitteln Sie b und c durch Messung.



Beispiel zum 4. Kongruenzsatz: Gegeben sind zwei Seiten und der Winkel, der der größeren Seite gegenüberliegt.

Es soll ein Dreieck mit b = 5,2 cm; c = 4,1 cm und β = 56° einge-tragen werden.



Lösung:
Man kann nicht mit b anfangen, überlegen Sie, warum!
Man zeichnet zunächst c = ⊕B = 4,1 cm. In B wird β = 56° einge-tragen. Anschließend wird ein Kreisbogen um A mit dem Radius b = 5,2 cm gezeichnet. Dessen Schnittpunkt mit dem freien Schenkel s von β ergibt den Punkt C. A wird mit C verbunden.

Übung 4:

Zeichen Sie ein Dreieck mit a = 3,7 cm; b = 3,4 cm und α = 60°. Ermitteln Sie c durch Messung.

Übungen zu 11.2

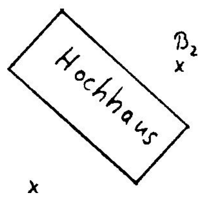
(Jetzt geht's ins Gelände!)

1. Am Fuß eine Felsmassivs liegen in gleicher Höhe über NN (Normalnull) die Geländepunkte A, B und C. Von A nach C soll ein Tunnel gebaut werden. Um die Bohrrichtung fest-zustellen, bestimmt man im Gelände die zugänglichen Strecken ⊕B = 620 m, B∩ = 380 m und auf der Katasterkarte ⊕∩ = 440 m.
   Stellen Sie durch eine möglichst genaue Zeichnung fest, unter welchem Winkel man von A aus (Winkel α) nach C und von C aus (Winkel γ) nach A bohren muss, damit die Bohrungen auf-einander zulaufen.

 ©Bundeswehrfachschule Koblenz

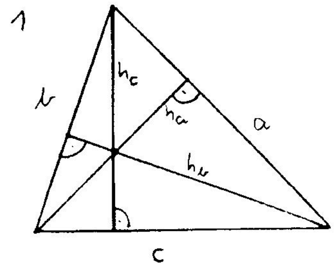
2. Zwischen den Geländepunkten A und C liegt ein Sumpf. Um die Länge von AC zu bestimmen, wählt mein einen Punkt B, der von A und C aus erreichbar ist, und bestimmt = 48 m, = 77 m und = 39°.
   Ermitteln Sie die Länge von AC durch eine geeignete Konstruktion (alle Punkte liegen auf gleicher Höhe).

3. Um die Breit eines Flusses, d.h. den Abstand der parallelen Ufer, zu ermitteln, wird an einem Ufer eine Standlinie = 28 m abgesteckt. von A und B wird der Baum C am anderen Ufer angepeilt. Man findet dabei) 77° und = 72°.
   Bestimmen Sie die Breite des Flusses durch eine Zeichnung.



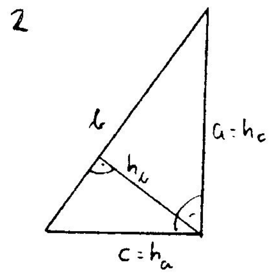
4. Sie erhalten den Auftrag, mit Hilfe eines Winkelmessgerätes und eines Zollstocks in ebenem Gelände den Abstand der beiden Bäume B_1 und B_2 zu ermitteln (siehe Abbildung).
   Welche Messungen müssen Sie durchführen?

11. 3 Hilfslinien im Dreieck



Dreiecke haben erstaunliche Eigenschaften. Davon werden Sie einige in diesem Teilkapitel kennenlernen.
Folgende Hilfslinien werden nacheinander behandelt: die Höhen, die Seitenhalbierenden, die Mittelsenkrechten und schließlich die Winkelhalbierenden.

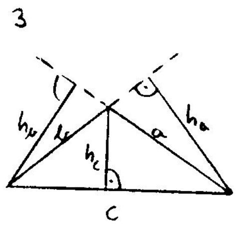
1. Die Höhen:



Eine Höhe in einem Dreieck ist der Abstand von einem Eckpunkt bis zur gegenüberliegenden Seite (bzw. bis zu deren Verlängerung, siehe Zeichnung 3). Die Höhen werden mit h_a, h_b und h_c gekennzeichnet. In einem spitzwinkligen Dreieck liegen alle Höhen innerhalb des Dreiecks (siehe Zeichnung 1), in einem rechtwinkligen Dreieck sind zwei Höhen gleich den Katheten (siehe Zeichnung 2), in einem stumpfwinkligen Dreieck liegen zwei Höhen außerhalb des Dreiecks /siehe Zeichnung 3).

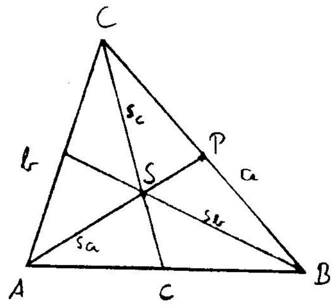
Eine besonders wichtige Eigenschaft:
Jedes Dreieck kann durch (mindestens) eine Höhe in zwei rechtwinklige Dreiecke geteilt werden.

Übung 1:



Zeichen Sie ein Dreieck mit c = 7 cm, a = 5 cm, b = 4 cm und tragen Sie alle Höhen ein.

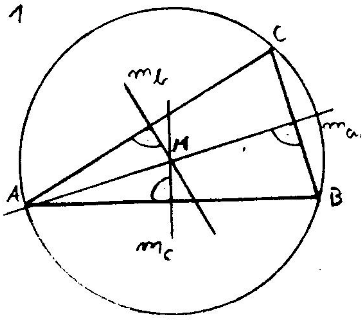
2. Die Seitenhalbierenden:



Eine Seitenhalbierende in einem Dreieck ist eine Strecke, die von einem Eckpunkt bis zur Mitte der diesem Eckpunkt gegenüberliegenden Seite verläuft. Die beiden Seitenhalbierenden werden mit s_a, s_b und s_c gekennzeichnet. Sie schneiden sich alle in einem Punkt S, dieser Punkt ist der Schwerpunkt des Dreiecks. Außerdem gilt: die Seitenhalbierenden teilen sich in S im Verhältnis 2:1 (vom Eckpunkt aus gesehen), d.h., dass z.B. $\oplus\Sigma = 2 \cdot \Sigma\Pi$ ist (überprüfen Sie dies in der Zeichnung!)

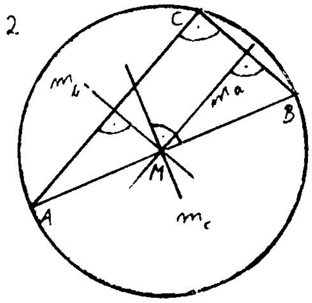
Übung 2:

a) Zeichnen Sie ein Dreieck auf Pappe mit C = 6 cm, $\alpha = 42°$, $\gamma = 33°$ und zeichnen Sie alle Seitenhalbierenden ein.
b) Schneiden Sie das Dreieck aus. Wie läßt sich erkennen, dass der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden der Schwerpunkt des Dreiecks ist?

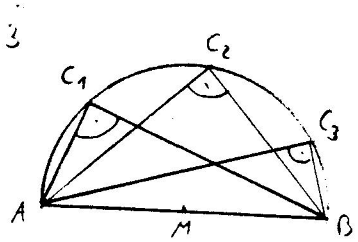


3. Die Mittelsenkrechten:

Eine Mittelsenkrechte in einem Dreieck ist eine Gerade, die durch die Mitte einer Seite verläuft und mit dieser Seite einen rechten Winkel bildet. Die Mittelsenkrechten werden mit m_a, m_b und m_c gekennzeichnet. Sie schneiden sich alle in einem Punkt M, dieser Punkt der Mittelpunkt des sog. Umkreises (auf dem Umkreis liegen alle Eckpunkte). Dieser Mittelpunkt liegt in einem spitzwinkligen Dreieck innerhalb des Dreiecks (siehe Zeichnung 1), in einem stumpfwinkligen Dreieck liegt er außerhalb (Prüfen Sie!). In einem rechtwinkligen Dreieck liegt er auf der Mitte der Hypotenuse (siehe Zeichnung 2).



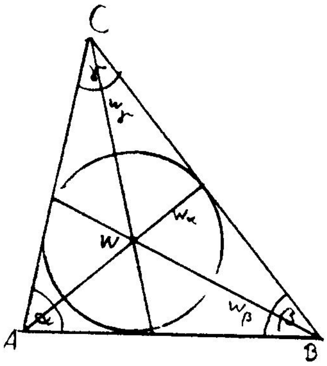
Daraus ergibt sich der **Satz des Thales:**
Der Winkel im Halbkreis ist ein rechter.
Das bedeutet anhand der Zeichnung 3:
Sie können auf einem Halbkreisbogen irgendwo einen Punkt C markieren, Sie erhalten immer ein rechtwinkliges Dreieck ABC.



Übung 3:

a) Zeichnen Sie ein Dreieck mit b = 4,2 cm, c= 5,4 cm, α = 90° und tragen Sie alle Mittelsenkrechten ein.
b) Zeichnen Sie den Umkreis.
c) Der Punkt A liegt in dem gezeichneten Dreieck auf einem Halbkreis um M. Wählen Sie einen beliebigen Punkt A_1 auf diesem Halbkreis und bestätigen Sie durch Messung den Satz des Thales.

4. Die Winkelhalbierenden



Eine Winkelhalbierende in einem Dreieck ist eine Strecke, die von einem Eckpunkt bis zur gegenüberliegenden Seite verläuft und den Winkel am Eckpunkt halbiert. Die Winkelhalbierenden werden mit w_α, w_β und w_γ gekennzeichnet. Sie schneiden sich alle in einem Punkt W, dieser Punkt ist der Mittelpunkt des Inkreises (der Inkreis berührt alle Seiten).

Übung 4:

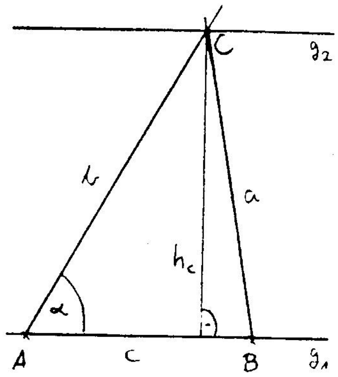
a) Zeichnen Sie ein Dreieck mit c = 5 cm, a = 4 cm und γ = 60° und tragen Sie alle Winkelhalbierenden ein 8vgl. 10.6, 3. Aufgabe).
b) Zeichnen Sie den Inkreis.

Bemerkung:
Dreiecke lassen sich auch (oft eindeutig) mit Hilfe von Höhen, Seitenhalbierenden, Mittelsenkrechten und Winkelhalbierenden konstruieren. Auf diese zum Teil recht schwierigen Konstruktionen soll hier nicht eingegangen werden. Es folgen lediglich Beispiele einer Konstruktion mit einer Höhe, was häufig benötigt wird.

Konstruktion mit Höhen

Beispiel:

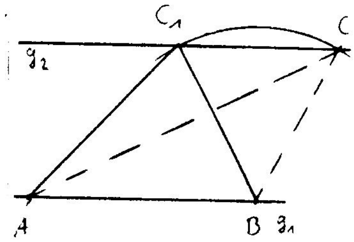
Ein Dreieck mit h_c 0 4 cm, c = 3 cm und $\alpha = 60°$ soll konstruiert werden.



Lösung:
In fast allen Fällen ist es bei einer gegebenen Höhe sinnvoll, zunächst zwei parallele Geraden g_1 und g_2 im Abstand der gegebenen Höhe zu zeichnen. Auf g_1 wird ein beliebiger Punkt A festgelegt. Von A aus wird auf g_1 die Strecke c = ⊕B = 3 cm abgetragen. In A wird der Winkel $\alpha = 60°$ eingezeichnet. Der Schnittpunkt des freien Schenkels von mit g_2 ist der Punkt C. C und B werden verbunden.

Vorsicht! Wenn Höhen gegen sind, gibt es häufig 2 Lösungen (zwei nicht kongruente Dreiecke)!

Beispiel:
Ein Dreieck mit c = 3 cm; h_c = 2 cm und a = 2,3 cm soll konstruiert werden.



Lösung:
Zunächst werden zwei parallele Geraden g_1 und g_2 im Abstand h_c = 2 cm gezeichnet. Auf g_1 wird die Strecke c = ⊕B = 3 cm eingetragen. Der Kreisbogen um B mit dem Radius a = 2,3 cm hat 2 Schnittpunkte C_1 und C_2 mit g_2. Man erhält 2 nicht kongruente Dreiecke ABC_1 und ABC_2.

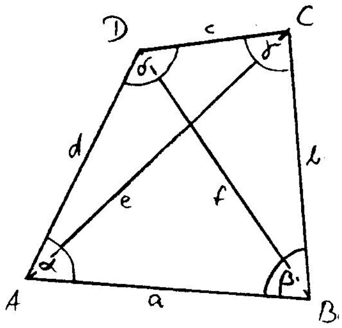
Übung 5:

1. In einem Dreieck sind gegeben: b= 3,6 cm, h_b = 2,5 cm, c = 3 cm. Zeigen Sie durch eine Zeichnung, dass es zwei nicht kongruente Dreiecke mit den obigen Größen gibt.
2. Zeichnen Sie ein Dreieck mit h_c = 4,2 cm, $\alpha = 66°$, $\beta = 38°$.

11.4 Vierecke

In diesem Teilkapitel werden die wichtigsten Typen von Vierecken beschrieben. In den jeweiligen Übungen geht es besonders um das Zeichnen der Vierecke. Dabei können Sie vielfach die bei den Dreieckskonstruktionen erworbenen Fertigkeiten anwenden.

11.4.1 Allgemeines Viereck

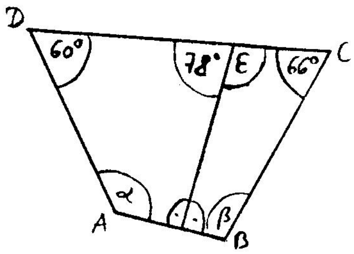


Das Viereck besitzt

4 Ecken:	A, B, C, D
4 Seiten:	⊕B = a, B∩ = b, ∩∠ = c, = d
4 Winkel:	α in A, β in B, γ in C, δ in D
2 Diagonalen:	⊕∩ = e, B∠ = f

Die Winkelsumme im Viereck beträgt 360°.
Begründung:
Das Viereck wird durch eine Diagonale in zwei Dreiecke mit einer Winkelsumme von je 180° zerlegt.

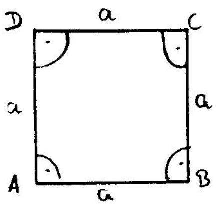
Übungen zu 11.4.1

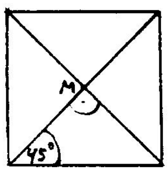


1. Berechnen Sie in der nebenstehenden Figur die fehlenden Winkel.
2. Zeichnen Sie ein Viereck aus a = 6,4 cm, b = 3,6 cm, α = 78°, β = 62°, δ = 83°. Bestimmen Sie die Länge von ⊕∩ = e aus der Zeichnung.

Vielleicht hatten Sie Probleme bei der Zeichnung des Vierecks zur 2. Übung. Wesentlich „angenehmer" ist es, wenn ein Viereck mit besonderen Eigenschaften gezeichnet werden soll. Besondere Eigenschaften haben Quadrat, Rechteck, Raute, Parallelogramm, Trapez und Drachen.

11.4.2 Quadrat



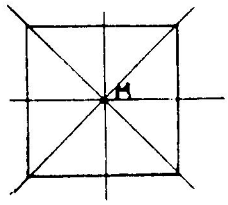


Das Quadrat ist das „vollkommenste" aller Vierecke.
Es hat folgende Eigenschaften:

- alle Seiten sind gleich lang;
- alle Winkel sind 90°;
- die gegenüberliebenden Seiten sind parallel;
- die Diagonalen sind gleich lang, sie halbieren sich in dem Schnittpunkt, stehen senkrecht aufeinander und halbieren die Winkel (siehe Zeichnung).

©Bundeswehrfachschule Koblenz

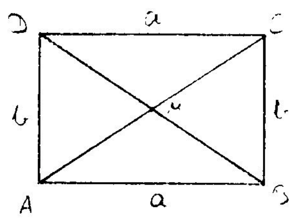
Mit Hilfe von Symmetrieeigenschaften kann man ein Quadrat so beschreiben:
Es hat 4 Symmetrieachsen, es sind die Geraden durch die gegenüberliegenden Eckpunkte und die Geraden durch die gegenüberliegenden Seitenmitten (Mittelparallelen).
Es ist punktsymmetrisch bezüglich M, M heißt Symmetriezentrum.



Übungen zu 11.4.2

1. Zeichnen Sie ein Quadrat mit a = 1,6 cm.
2. Zeichnen Sie ein Quadrat mit der Diagonallänge e = 2,8 cm.

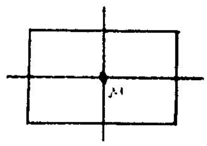
11.4.3 Rechteck



Das Rechteck hat folgende Eigenschaften:

- alle Winkel sind 90°;
- die Gegenseiten sind gleich lang und parallel;
- die Diagonalen sind gleich lang und halbieren sich in ihrem Scheitelpunkt M.

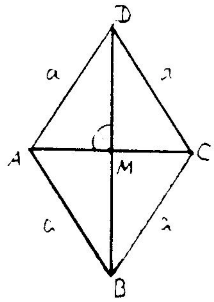
Es hat folgende Symmetrieeigenschaften:
Die beiden Mittelparallelen sind Symmetrieachsen.
M ist das Symmetriezentrum.



Übungen zu 11.4.3

1. Zeichnen Sie ein Rechteck mit a = 4,0 cm und b = 2,8 cm.
2. Zeichnen Sie ein Rechteck mit a = 3,6 cm und der Diagonalen e = 3,8 cm.

11.4.4 Raute



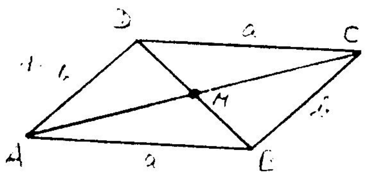
Eigenschaften einer Raute:
- alle Seiten sind gleich lang;
- die gegenüberliegenden Seiten sind parallel;
- die gegenüberliegenden Winkel sind gleich groß;
- die Diagonalen stehen senkrecht aufeinander, halbieren sich in ihrem Schnittpunkt M und halbieren die Winkel.

Symmetrieeigenschaften:
Die Geraden durch die gegenüberliegenden Eckpunkte sind Symmetrieachsen.
M ist das Symmetriezentrum.

Übungen zu 11.4.4

1. Zeichnen Sie eine Raute aus a = 4 cm und e = ⊕∩ = 6,8 cm.
2. In einer Raute ist die Diagonale f = B∠ so lang wie die Seiten. Wie groß sind die Winkel dieser Raute?

11.4.5 Parallelogramm



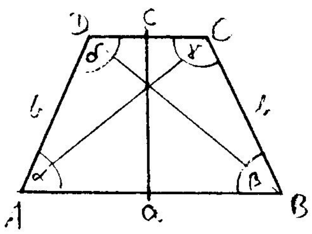
Eigenschaften eines Parallelogramms:
- die gegenüberliegenden Seiten sind gleich lang und parallel
- die gegenüberliegenden Winkel sind gleich groß; zwei benachbarte Winkel haben zusammen 180°
- die Diagonalen halbieren sich in ihrem Schnittpunkt M.

Auch bei einem Parallelogramm ist M das Symmetriezentrum.

Übungen zu 11.4.5

1. Zeichnen Sie ein Parallelogramm aus a = 2,4 cm, β = 150°, b = 2,4 cm.
2. Zeichnen Sie ein Parallelogramm aus a = 3 cm, f = 3,6 cm, α = 115°.

11.4.6 Trapez



Ein gleichschenkliges Trapez hat folgende Eigenschaften:
- zwei Seiten sind parallel (in der Zeichnung a ∥ c), die beiden anderen Seiten (die Schenkel) sind gleich lang (daher der Name); die benachbarten Winkel an den Parallelen sind gleich groß (hier: $\alpha = \beta$, $\delta = \gamma$), die Winkel an den Schenkeln haben zusammen 180° (hier: $\alpha + \delta = 180°$, $\beta + \gamma = 180°$);
- die Diagonalen sind gleich lang;
- es hat eine Symmetrieachse durch die jeweilige Mitte der parallelen Seiten.

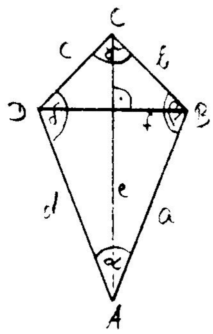
Sind in einem Trapez die Schenkel nicht gleich lang, dann hat es keine Symmetrieeigenschaft.
Zwei Seiten sind parallel, die Winkel an den Schenkeln haben zusammen 180°.
Die übrigen oben genannten Eigenschaften gelten hierbei nicht.

Übungen zu 11.4.6

1. Zeichnen Sie ein Trapez mit den parallelen Seiten a = 5,3 cm und c = 2,1 cm sowie der Seite b = 2,4 cm und dem Winkel β = 65°.
2. Zeichnen Sie ein gleichschenkliges Trapez (a ∥ c) mit a = 4,2 cm, d = 1,9 cm und β = 51°.

 ©Bundeswehrfachschule Koblenz

11.4.7 Drachen



Ein Drachen ist ein schlangen- oder echsenartiges, oft geflügeltes Fabeltier (so steht es u.a. im Lexikon). Mit der abgebildeten Figur hat dies wenig zu tun.
Ein geometrischer gerader Drachen (es gibt auch schiefe Drachen, dieser werden hier nicht behandelt) hat folgende Eigenschaften:
- zwei Paar benachbarte Seiten sind gleich lang (hier: d = a, c = b);
- die Diagonalen stehen senkrecht aufeinander, eine Diagonale (hier:) halbiert die andere (hier) und halbiert zwei Winkel (hier: und);
- ein Paar gegenüberliegender Winkel ist gleich groß (hier: =).

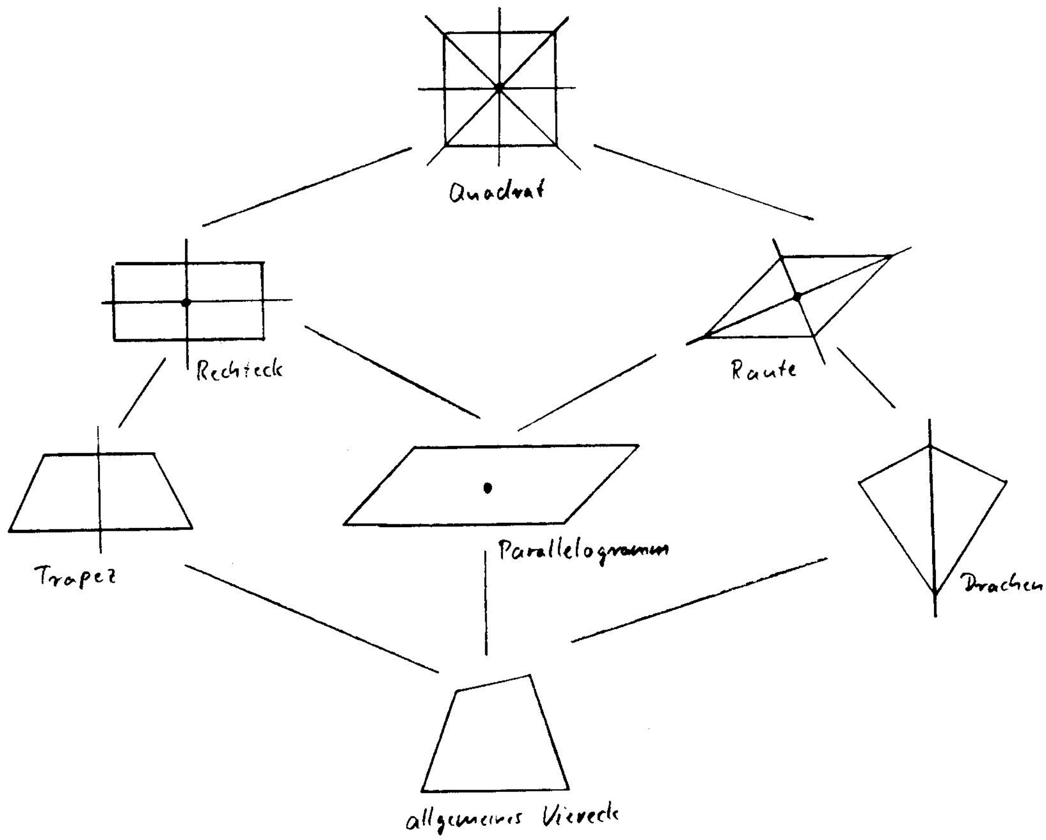
Ein Drachen hat eine Symmetrieachse (hier: Gerade durch)

Übungen zu 11.4.7

1. Zeichnen Sie einen geraden Drachen mit a = 5,1 cm, b = 3,3 cm, e = = 6,6 cm.
2. Verbinden Sie die Mitten der Seiten des Drachens aus Übung 1 miteinander. Welche Figur entsteht?

11.4.8 System der Vierecke

Die Vierecke lassen sich bezüglich Symmetrieachsen und Spiegelzentrum systematisch gliedern, angefangen vom Quadrat mit 4 Symmetrieachsen und einem Spiegelzentrum bis hin zu einem allgemeinen Viereck ohne Symmetrien.



Aufgaben zur Lehreinheit 11

1. Konstruieren Sie jeweils ein Dreieck und bestimmen Sie durch Messung:

   a) = 35°, = 55°, c = 4 cm, a = ?

   b) a = 4,4, = 70°, h_a = 3,2 cm; c = ?

2. Konstruieren Sie jeweils ein Viereck und bestimmen Sie durch Messung:

   a) ein Parallelogramm mit a = 2,4 cm, dem Abstand zwischen a und c vom 2,8 cm, = 120°; b = ?

   b) ein gleichschenkliges Trapez mit a = 6 cm, = = 52°, e = = 4,8 cm; b = ?

3. a) Zeichnen Sie ein Dreieck mit c = 7 cm, a = 6 cm und b = 5 cm.

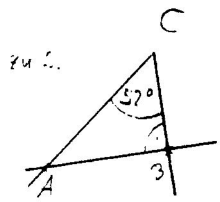
   b) Tragen Sie in dem Dreieck folgende Hilfslinien ein:
   h_b, w_y, m_c, s_a.

 ©Bundeswehrfachschule Koblenz

Lösungen der Übungen und Aufgaben

Übungen

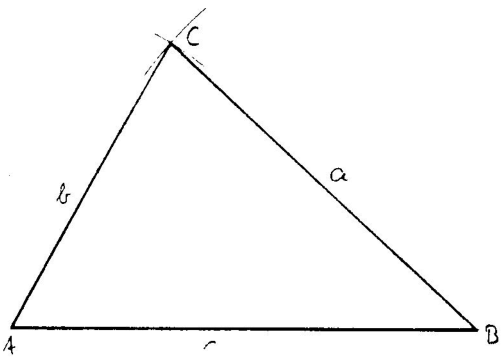
Übungen zu 11.1:



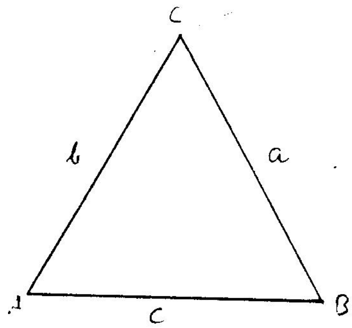
1. a) $\gamma = 62°$; b) $\beta_1 = 35°$; $\beta_2 = 28°$
2. 38°

11.2, Übung 1:

1.

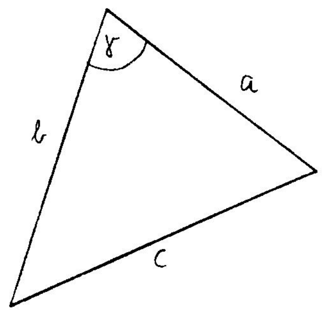


2.

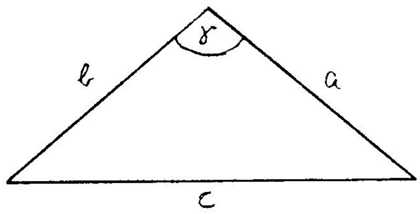


11.2, Übung 2:

1. c ≈ 4,6 cm

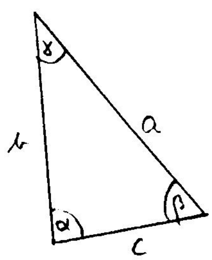


2. c ≈ 5,5 cm



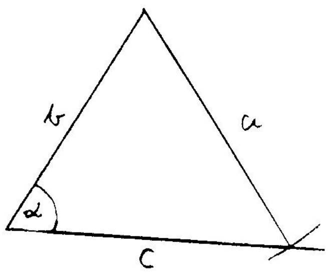
11.2, Übung 3:

$\gamma = 180° - 59° - 85° = 36°$;
c ≈ 2,1 cm; b ≈ 3 cm



11.2, Übung 4:

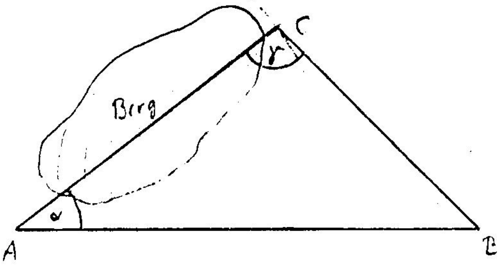
c ≈ 3,9 cm



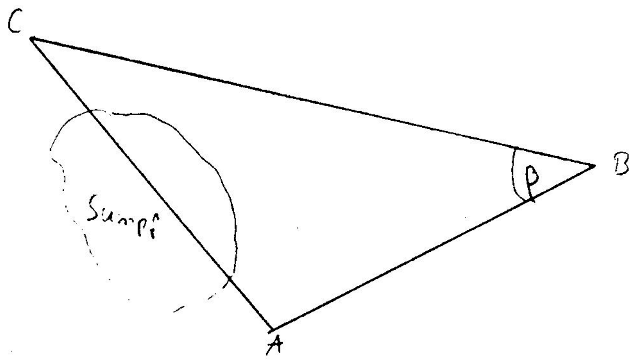
 ©Bundeswehrfachschule Koblenz

Übungen zu 11.2:

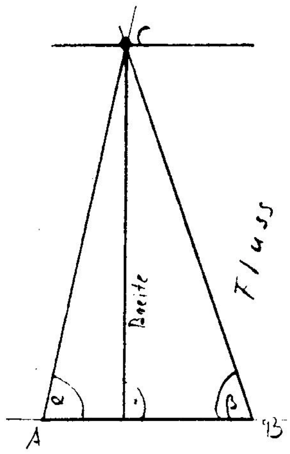
1. 98°, = 37°



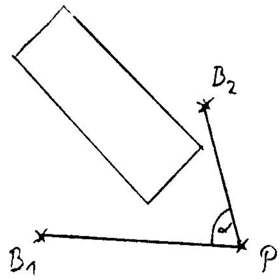
2. 50 m



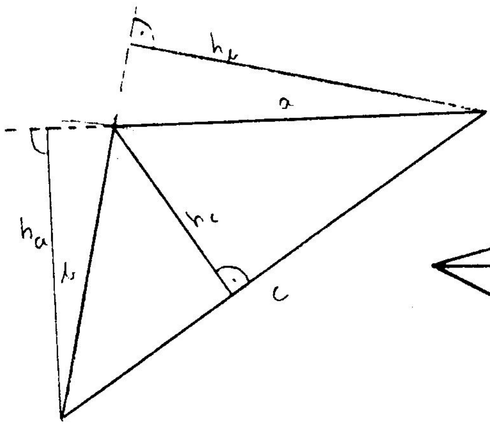
3. Flussbreite 50 m



4. Die Strecke wird gemessen,
in
P wird der Winkel zwischen und bestimmt, schließlich wird gemessen , lässt sich durch Zeichnung ermitteln (2. Kongruenzsatz).

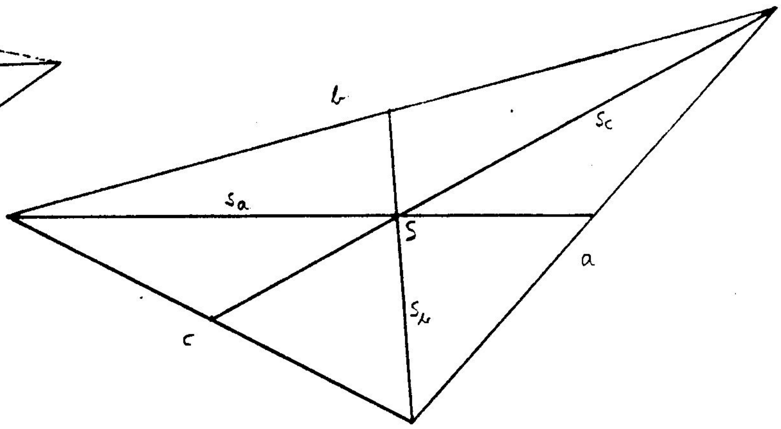


11.3, Übung 1:

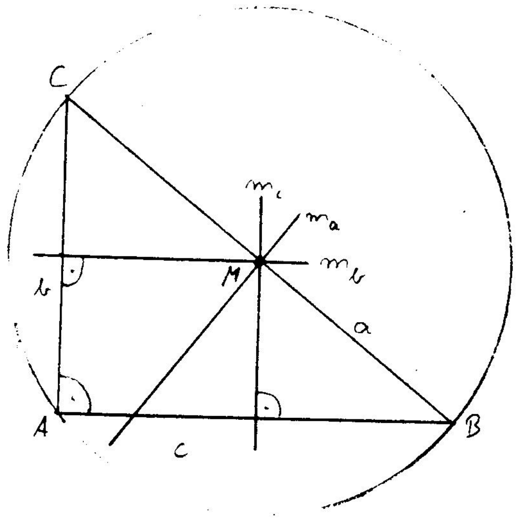


11.3, Übung 2:

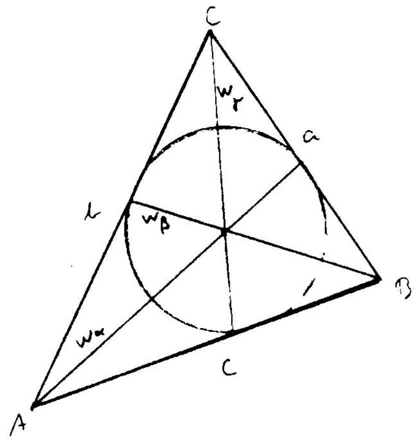
b) Das Dreieck wird in S z.B. auf die Spitze einer senkrecht gehaltenen Nadel gelegt.



11.3, Übung 3:

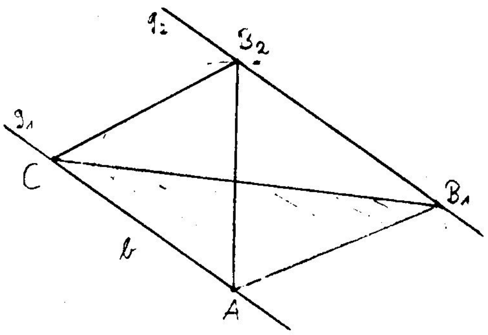


11.3, Übung 4:

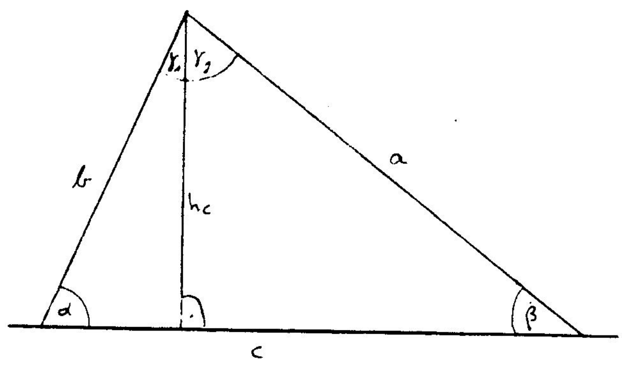


11.3, Übung 5:

1. Die Dreiecke AB_1C und AB_2C sind nicht kongruent

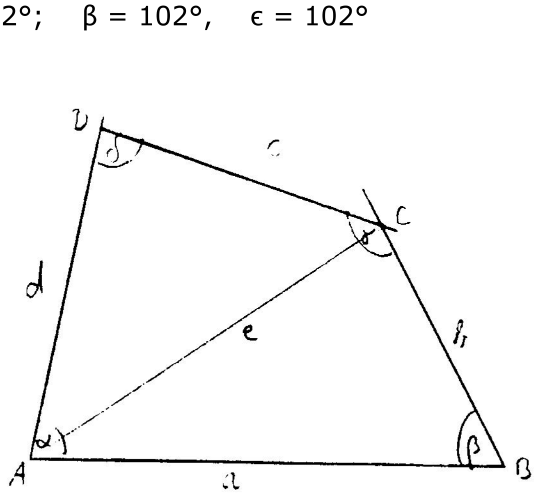


2. $\alpha = 66° \Rightarrow \gamma_1 = 24°$, $\beta = 38°$ $\Rightarrow \gamma_2 = 52°$



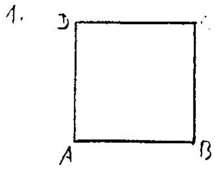
Übungen zu 11.4.1: 1. $\alpha = 132°$; $\beta = 102°$, $\epsilon = 102°$

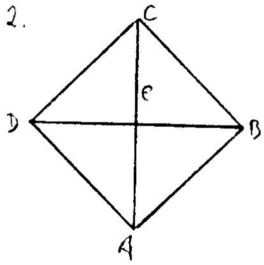
2. e = 5,7 cm



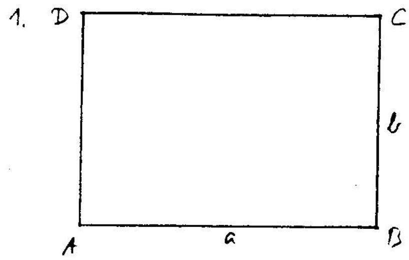
 ©Bundeswehrfachschule Koblenz

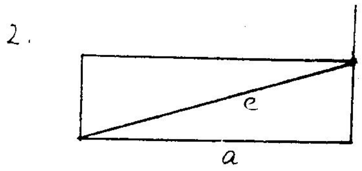
Übungen zu 11.4.2:





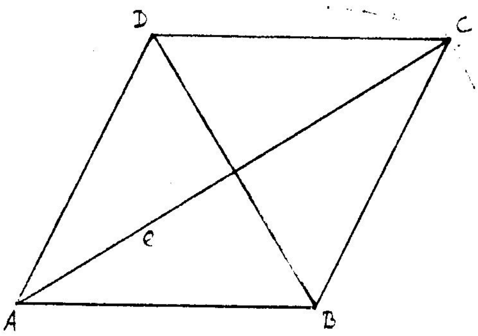
Übungen zu 11.4.3:





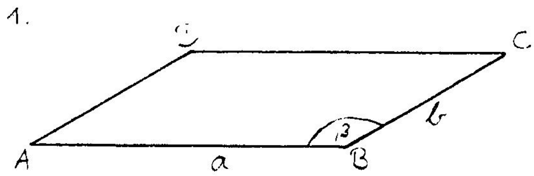
Übungen zu 11.4.4:

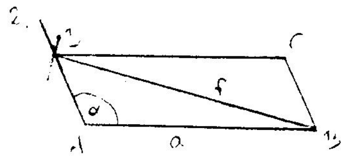
1. B∠ = 4,2 cm



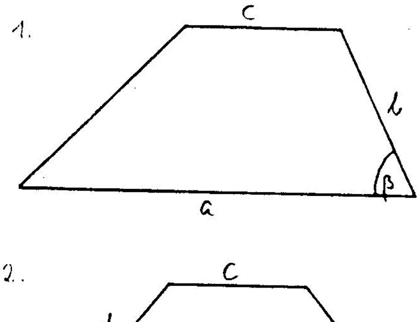
2. Die Winkel an A und C sind 60°, an B und D sind es 120° (die Diagonale f teilt die Raute in zwei gleichseitige Dreiecke).

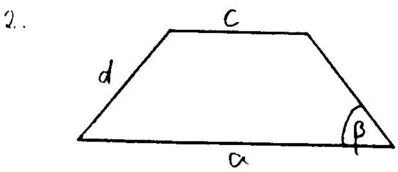
Übungen zu 11.4.5:





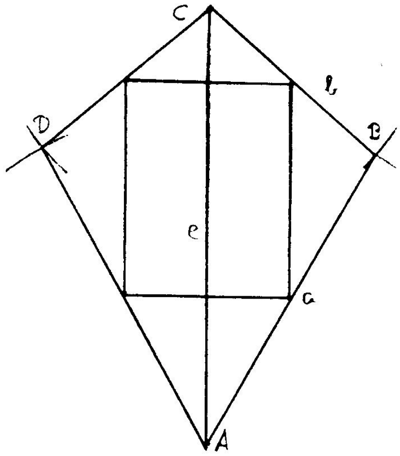
Übungen zu 11.4.6:





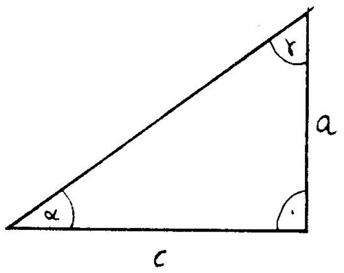
Übungen zu 11.4.7:

1., 2. Es entsteht ein Rechteck

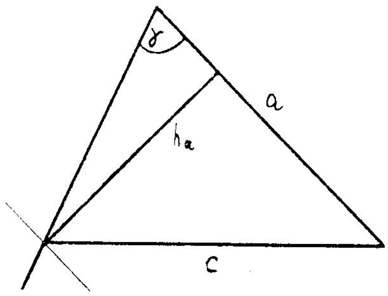


Aufgaben

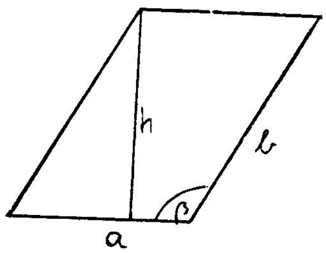
Aufgabe 1: a) a = 2,9 cm



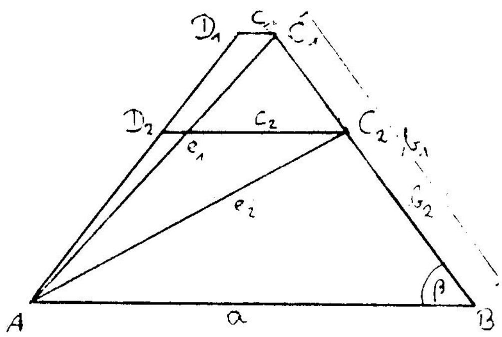
b) c = 4,6 cm



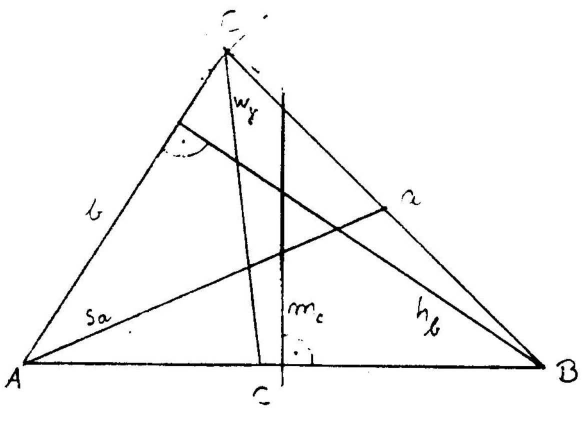
Aufgabe 2: a) b = 3,2 cm



b) Genau zeichnen!
Es gibt 2 Lösungen, (vgl. 4 Kongruenzsatz)
b_1 = 4,5 cm b_2 = 2,9 cm



Aufgabe 3:



FERNUNTERRICHT DER BUNDESWEHRFACHSCHULE

DstGrd Name Vorname

Einheit Standort DZE

Privatanschrift Datum

1. Konstruieren Sie jeweils ein Dreieck.
   a) $a = 3{,}4$ cm; $\beta = 42°$; $\gamma = 100°$
   b) $c = 5{,}8$ cm; $\alpha = 64°$; $h_c = 3{,}6$ cm

2. a) Zeichnen Sie ein Dreieck mit $A = 4{,}8$ cm; $b = 6{,}2$ cm; $c = 3{,}8$ cm
   b) Tragen Sie in dem Dreieck folgende Hilfslinien ein: h_c, w_β, m_b, s_a
   c) Markieren Sie den Schwerpunkt S in dem Dreieck.

3. Konstruieren Sie jeweils ein Viereck:
   a) eine Raute mit $a = 4$ cm; $\alpha = 50°$
   b) einen Drachen mit $f = 3{,}2$ cm; $a = 4$ cm; $b = 2{,}2$ cm
   c) ein Trapez mit $a \parallel c$, $c = 3{,}4$ cm; $\delta = 95°$; $\gamma = 120°$; $d = 2{,}7$ cm

 ©Bundeswehrfachschule Koblenz